

Automatismes en première 2022/2023

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

1^{er} octobre 2023

Plan

- 1 Calcul algébrique et littéral
- 2 Démontrer une égalité
- 3 Calculs d'aire
- 4 Second degré
- 5 Dérivation locale
- 6 Dérivation Globale
- 7 Suites numériques
- 8 Exponentielle
- 9 Application du produit scalaire
- 10 Raisonnement

Automatisme 1 thème : Puissances

- 1 Écrire $(3^2 \times 3^5)^4$ sous la forme d'une puissance de 3.
- 2 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 5$ et $BC = 13$, calculer la longueur AC .
- 3 Simplifier $(2\sqrt{3})^4$
- 4 Simplifier $\frac{4+\sqrt{60}}{2}$
- 5 Soit a et b des réels avec $b \geq 0$, simplifier $\frac{a-\sqrt{b}}{2} - \frac{-a+\sqrt{b}}{2}$
- 6 Développer et réduire $\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$

Automatisme 2 thème : Fractions

Réduire au même dénominateur et simplifier les expressions suivantes définies pour l'indéterminée x ou n .

- $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
- $\frac{1}{n-4} - n$
- $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$
- $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$
- $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$

Automatisme 3 thème : Factoriser

Soit a un réel.

- Factoriser $a^4 - 16$
- Factoriser $a^2 - 1 + 3a - 3$ par $a - 1$
- Factoriser $2a^2 + 5a + 2$ par $a + 2$
- Factoriser $a^2 + a - 2$
- Factoriser $a^2 + a - 6$

Plan

- 1 Calcul algébrique et littéral
- 2 Démontrer une égalité**
- 3 Calculs d'aire
- 4 Second degré
- 5 Dérivation locale
- 6 Dérivation Globale
- 7 Suites numériques
- 8 Exponentielle
- 9 Application du produit scalaire
- 10 Raisonnement

Automatisme 4 thème : *Démontrer une égalité*

Soit f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} telles que pour tout réel x , $f(x) = 10 - x$ et $g(x) = 3x^2$.

Démontrer que la proposition suivante est vraie :

$$\text{pour tout réel } x, \text{ on a } f(x) - g(x) = (2 + x)(5 - 3x)$$

Automatisme 5 *thème* : Démontrer qu'une proposition est fausse

Démontrer que la proposition suivante est fausse :

$$\text{pour tout réel } x, \text{ on a } (x + 3)^2 = x^2 + 3^2$$

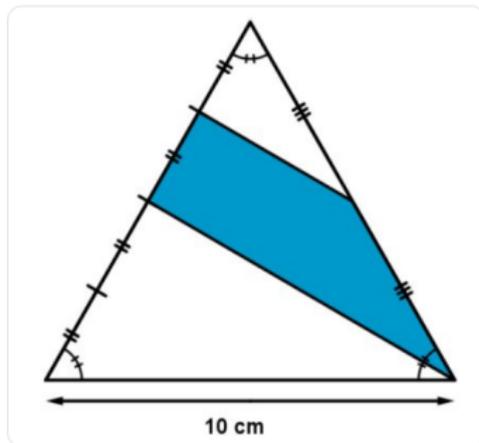
Plan

- 1 Calcul algébrique et littéral
- 2 Démontrer une égalité
- 3 Calculs d'aire**
- 4 Second degré
- 5 Dérivation locale
- 6 Dérivation Globale
- 7 Suites numériques
- 8 Exponentielle
- 9 Application du produit scalaire
- 10 Raisonnement

Automatisme 6 thème : Calcul d'aire

Quelle fraction du triangle équilatéral est recouverte par l'aire bleue ? Quelle est la valeur exacte de l'aire bleue ?

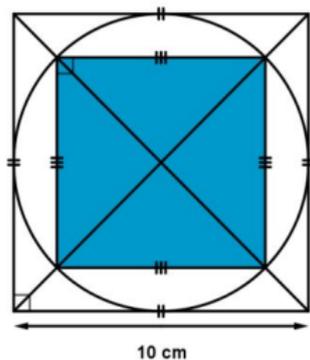
Source : Daniel Mentrard



Automatisme 7 thème : Calcul d'aire

Quelle est la valeur exacte de l'aire bleue ?

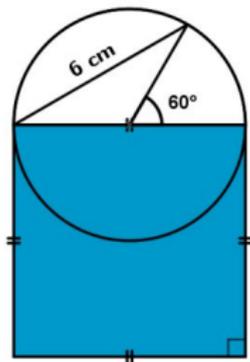
Source : Daniel Mentrard



Automatisme 8 thème : Calcul d'aire

Quelle est la valeur exacte de l'aire bleue ?

Source : Daniel Mentrard



Plan

- 1 Calcul algébrique et littéral
- 2 Démontrer une égalité
- 3 Calculs d'aire
- 4 Second degré**
- 5 Dérivation locale
- 6 Dérivation Globale
- 7 Suites numériques
- 8 Exponentielle
- 9 Application du produit scalaire
- 10 Raisonnement

Automatisme 9 thème : Résoudre une équation du second degré

- Déterminer le nombre de solutions dans \mathbb{R} de l'équation $x^2 = m$ si $m > 0$
- Déterminer le nombre de solutions dans \mathbb{R} de l'équation $x^2 = m$ si $m = 0$
- Déterminer le nombre de solutions dans \mathbb{R} de l'équation $x^2 = m$ si $m < 0$
- Résoudre mentalement dans \mathbb{R} l'équation $x^2 = 9$
- Résoudre mentalement dans \mathbb{R} l'équation $(x - 1)^2 = 9$
- Résoudre mentalement dans \mathbb{R} l'équation $16 - (x - 1)^2 = 7$

Automatisme 10 *thème* : Déterminer l'axe de symétrie d'une parabole

- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = x^2$
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 3 - x^2$
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = (x - 3)^2$
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = (x + 3)^2$
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = (3 - x)^2 - 1$
- Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = -3x^2 - 6x + 1$

Automatisme 11 *thème* : Déterminer les racines d'un trinôme

- Déterminer les racines du trinôme d'expression $f(x) = -3(x + 2)(1 - x)$
- Déterminer les racines du trinôme d'expression $f(x) = 16 - x^2$
- Déterminer les racines du trinôme d'expression $f(x) = x^2 + 1$
- Déterminer les racines du trinôme d'expression $f(x) = 16 - (x - 1)^2$

Automatisme 12 *thème : second degré*

Pour chacun des trinômes suivants déterminer le signe de son discriminant sans le calculer.

- f_1 définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = x^2 + 100$
- f_2 définie sur \mathbb{R} par $f_2(x) = (x - 100)^2$
- f_3 définie sur \mathbb{R} par $f_3(x) = (x + 100)^2$
- f_4 définie sur \mathbb{R} par $f_4(x) = x^2 - 100$

Automatisme 13 *thème : second degré*

Un problème :

Un batelier descend une rivière de 120 km. Il la remonte ensuite et met un jour de plus, car, chaque jour, il fait 6 km de moins qu'en descendant.

Combien de jours a-t-il mis pour descendre ?

Automatisme 14 *thème : second degré*

- 1 Déterminer deux réels dont la somme est 2002 et le produit 2002.
- 2 Peut-on construire un rectangle d'aire 7 cm^2 et de périmètre $10,6 \text{ cm}$?

Automatisme 15 *thème* : équations avec changement d'inconnue

- 1 Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $x^2 - 2x = 3$.
- 2 Avec le changement d'inconnue $X = x^2$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $x^4 - 2x^2 = 3$.
- 3 Avec le changement d'inconnue $X = \sqrt{x}$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $x - 2\sqrt{x} = 3$.
- 4 Avec le changement d'inconnue $X = \frac{1}{x}$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $\frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x} = 3$.

Plan

- 1 Calcul algébrique et littéral
- 2 Démontrer une égalité
- 3 Calculs d'aire
- 4 Second degré
- 5 Dérivation locale**
- 6 Dérivation Globale
- 7 Suites numériques
- 8 Exponentielle
- 9 Application du produit scalaire
- 10 Raisonnement

Automatisme 16 *thème : dérivation locale*

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 2x^2 - x$$

Soit h un réel, développer et réduire

$$f(-1 + h)$$

Automatisme 17 *thème : dérivation locale*

Soit h un réel non nul, simplifier la fraction

$$\frac{h}{h^2 + 3h}$$

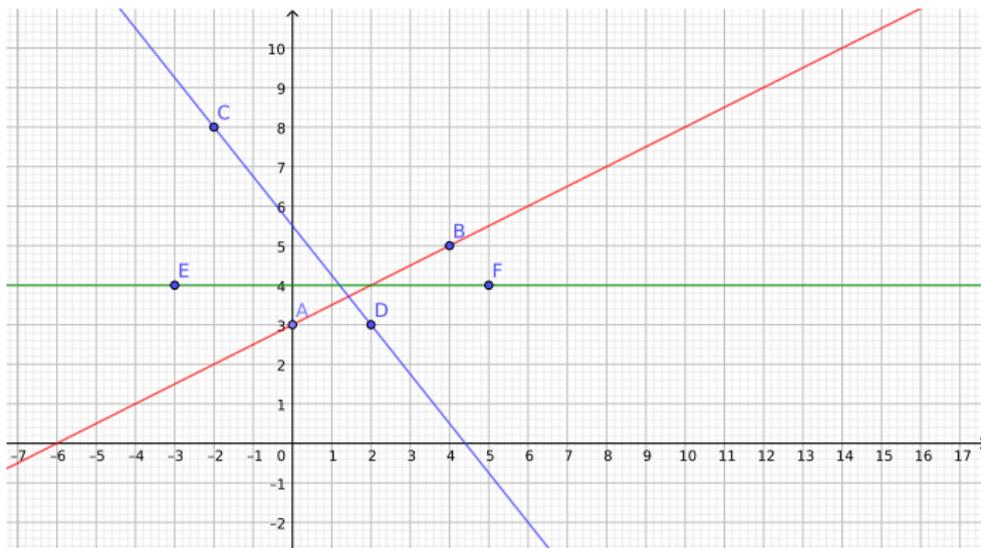
Automatisme 18 *thème : dérivation locale*

Soit h un réel non nul, simplifier la fraction

$$A(h) = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h}$$

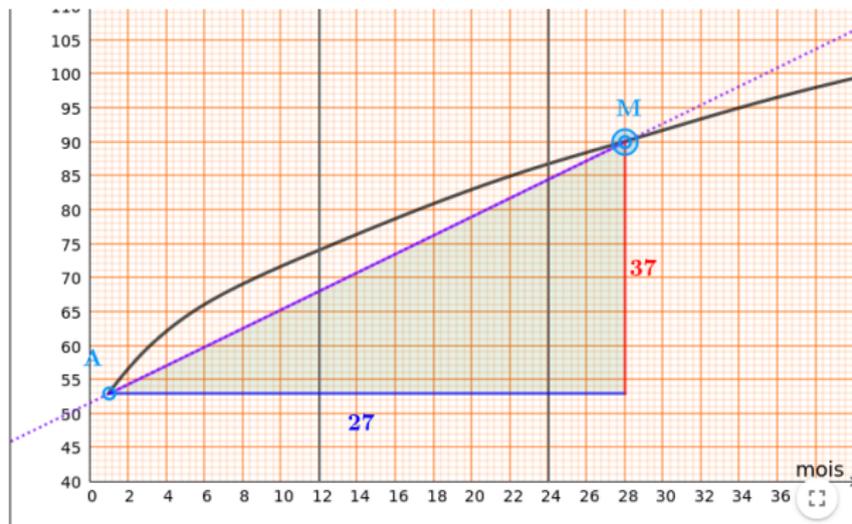
Automatisme 19 *thème : dérivation locale*

Déterminer une équation des droites (AB) , (CD) et (EF) .



Automatisme 20 thème : dérivation locale

On considère une courbe de fonction passant par le point A de coordonnées (1; 53). Déterminez une équation de la sécante (AM).



Automatisme 21 *thème : dérivation locale*

On considère la fonction affine f
telle que :

$$f(0) = 5 \text{ et } f(4) = 13.$$

En notant $f(x) = mx + p$, déterminer m
puis p .

Automatisme 22 thème : dérivation locale

On considère la fonction affine g
telle que :

$$g(-2) = 7 \text{ et } g(2) = 11.$$

En notant $g(x) = mx + p$, déterminer m
puis p .

Automatisme 23 thème : dérivation locale

Déterminer le coefficient directeur des droites suivantes.

1. \mathcal{D}_1 , droite passant par $A(-1 ; 5)$ et $B(3 ; 7)$.

2. \mathcal{D}_2 , droite passant par $C(7 ; 8)$ et $D(-1 ; 8)$.

3. \mathcal{D}_3 , droite passant par $E(4 ; 0,25)$ et $F(13 ; 0,75)$.

Automatisme 24 *thème : dérivation locale*

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 + x$$

Soit h un réel, développer et réduire

$$f(1 + h)$$

Automatisme 25 *thème : dérivation locale*

Soit h un réel non nul, simplifier la fraction

$$\frac{h^2 + 3h}{h}$$

Automatisme 26 *thème : dérivation locale*

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 0[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Soit un réel $a < 0$ et un réel $h \neq 0$ tel que $a + h < 0$, démontrer que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-h}{(a+h)a}$.
- En déduire que f est dérivable en tout réel $a < 0$ et déterminer l'expression de $f'(a)$.
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2 .

Automatisme 27 thème : dérivation locale

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

- Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 3$.
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Plan

- 1 Calcul algébrique et littéral
- 2 Démontrer une égalité
- 3 Calculs d'aire
- 4 Second degré
- 5 Dérivation locale
- 6 Dérivation Globale**
- 7 Suites numériques
- 8 Exponentielle
- 9 Application du produit scalaire
- 10 Raisonnement

Automatisme 28 *thème : dérivation*

Déterminer une expression de la fonction dérivée pour la fonction f dérivable sur l'intervalle I .

- $f : x \mapsto \frac{x^3-1}{5x^2+1}$ sur \mathbb{R} ;
- $f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$;
- $f : x \mapsto (8-3x)^7$ sur $]0; +\infty[$;
- $f : x \mapsto 4x - \frac{1}{x-3}$ sur $]3; +\infty[$.

Automatisme 29 thème : dérivation

Soit f une fonction dérivable sur $[-8; 6]$ dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-8	-5	2	3	6
$f(x)$	4	0	-1	0	

Arrows in the original image indicate the following transitions: 4 to 0, 0 to -1, -1 to 0, and 0 to the next cell.

- 1 Dresser le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f sur l'intervalle $[-8; 6]$.
- 2 Dresser le tableau de variations d'une fonction F dérivable sur l'intervalle $[-8; 6]$ et dont la dérivée est f .

Automatisme 30 *thème : dérivation*

Déterminer une expression de la fonction dérivée pour la fonction f dérivable sur l'intervalle I .

- $f : x \mapsto \sqrt{3x+1}$ sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$;
- $f : x \mapsto (5x-3)\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$;
- $f : x \mapsto (605x-3)^{607}$ sur \mathbb{R} ;
- $f : x \mapsto \frac{1}{3} - \frac{2}{3-x}$ sur $]3; +\infty[$.

Plan

- 1 Calcul algébrique et littéral
- 2 Démontrer une égalité
- 3 Calculs d'aire
- 4 Second degré
- 5 Dérivation locale
- 6 Dérivation Globale
- 7 Suites numériques**
- 8 Exponentielle
- 9 Application du produit scalaire
- 10 Raisonnement

Automatisme 31 *thème : suites*

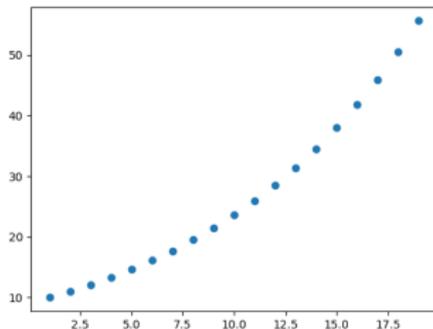
On considère deux modèles d'évolution d'un abonnement mensuel d'électricité dont le tarif évolue au premier janvier de chaque année.

- Modèle 1 : l'abonnement coûte 10 euros la première année puis augmente de 1,5 euros chaque année
 - Modèle 2 : l'abonnement coûte 10 euros la première année puis augmente de 8 % chaque année.
- 1 Avec le modèle 1, quel est le prix de l'abonnement la deuxième année ? la troisième année ? la $n^{\text{ième}}$ année ?
 - 2 Avec le modèle 1, quel est le prix de l'abonnement la deuxième année ? la troisième année ? la $n^{\text{ième}}$ année ?

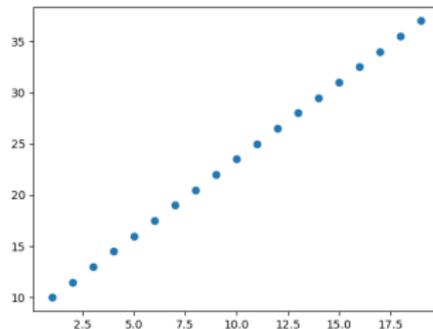
Automatisme 32 *thème : suites*

On reprend les deux modèles d'évolution de la question précédente. Associez un graphique à chaque modèle.

Graphique A



Graphique B



Automatisme 33 *thème : suites*

Pour tout n entier naturel, on définit l'expression
 $u(n) = 2n^2 - 3n + 1$.

- 1 Calculer $u(5)$. Peut-on calculer $u(-5)$ et $u(2,4)$ et $u(12/3)$?
- 2 Soit m un entier naturel, exprimer $u(m+1)$ en fonction de m .
- 3 Soit n un entier naturel, exprimer $u(n+1)$ en fonction de n .
- 4 Soit m un entier strictement positif, exprimer $u(m-1)$ en fonction de m .
- 5 Soit n un entier strictement positif, exprimer $u(n-1)$ en fonction de n .

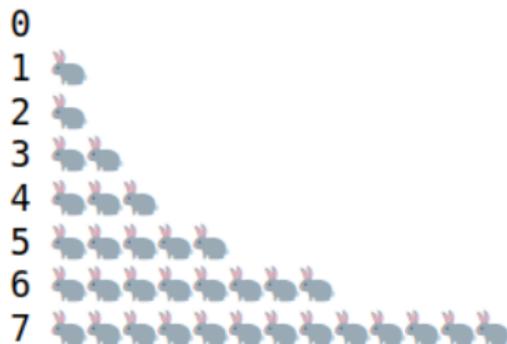
Automatisme 34 *thème : suites*

Pour tout n entier naturel, on définit l'expression $v(n) = \frac{3^{2n}}{2^n}$.

- 1 Exprimer $v(1)$ et $v(4)$ sous forme de fractions irréductibles.
- 2 Soit m un entier naturel, exprimer $v(m+1)$ en fonction de m .
- 3 Soit n un entier naturel, exprimer $\frac{v(n+1)}{v(n)}$ en fonction de n .

Automatisme 35 *thème : suites*

Quel est le terme suivant de la suite logique ci-dessous ?



Automatisme 36 *thème : suites*

- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - n$. Calculer u_4 et u_7 puis démontrer que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = 2n$.
- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_{30} .
- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_n = u_{n-1} - n + 1$. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_{30} .

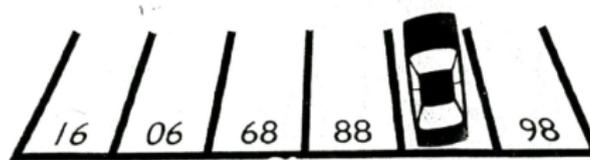
Automatisme 37 thème : suites

Pour tout n entier naturel, on définit l'expression $v(n) = \frac{3^{2n}}{2^n}$.

- 1 Exprimer $v(1)$ et $v(4)$ sous forme de fractions irréductibles.
- 2 Soit m un entier naturel, exprimer $v(m+1)$ en fonction de m .
- 3 Soit n un entier naturel, exprimer $\frac{v(n+1)}{v(n)}$ en fonction de n .

Automatisme 38 *thème : suites*

QUELLE PLACE DE PARKING CACHE LA VOITURE ?



Automatisme 39 *thème : suites : algorithme de seuil*

On considère la suite u définie par $u_0 = 100$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$. On admet qu'il existe un entier p tel que $u_p < 20$. Complétez l'algorithme de seuil ci-dessous pour qu'il détermine le plus petit entier n tel que $u_n < 20$.

```
def seuil():  
    u = 100  
    n = 0  
    while ... :  
        u = ...  
        n = ...  
    return n
```

Automatisme 40 *thème : suites*

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (2n - 1)^2 - 1$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$u_n - u_{n-1} = -8n + 8$$

Automatisme 41 *thème : suites*

```
#On définit la suite (Un) par Un=f(n)
def f(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return 1/n**2
```

- $u_0 = 1$ Vrai ou Faux ?
- $u_1 = 0,5$ Vrai ou Faux ?
- $u_{50} = 0,0004$ Vrai ou Faux ?
- La suite n'est pas définie en 0. Vrai ou Faux ?

Automatisme 42 *thème : suites*



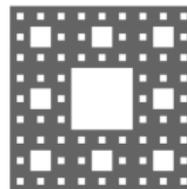
Étape 0 : 0 découpe



Étape 1 : 1 découpe



Étape 2 : 9 découpes



Étape 3 : 73 découpes

On poursuit cette suite logique de construction de figures.
Combien de carrés blancs seront sur la figure de l'étape 12 ?

Automatisme 43 *thème : suites*

Déterminer la nature (arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre) des suites ci-dessous définies par leur terme général :

- Pour tout entier naturel n , $u_n = e^{3n+4}$.
- Pour tout entier naturel n , $v_n = e^3 n + 5$.
- Pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{e^{3n} e^{-4n}}{e^{-5}}$.
- Pour tout entier naturel n , $v_n = e^n + e^{2n}$.

Plan

- 1 Calcul algébrique et littéral
- 2 Démontrer une égalité
- 3 Calculs d'aire
- 4 Second degré
- 5 Dérivation locale
- 6 Dérivation Globale
- 7 Suites numériques
- 8 Exponentielle**
- 9 Application du produit scalaire
- 10 Raisonnement

Automatisme 44 thème : Exponentielle

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

- 1 Démontrer que pour tout réel x , on a $f(x) = \frac{e^x-2}{e^x+1}$.
- 2 Déterminer une expression de $f'(x)$ pour x réel.
- 3 En déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

Plan

- 1 Calcul algébrique et littéral
- 2 Démontrer une égalité
- 3 Calculs d'aire
- 4 Second degré
- 5 Dérivation locale
- 6 Dérivation Globale
- 7 Suites numériques
- 8 Exponentielle
- 9 Application du produit scalaire**
- 10 Raisonnement

Automatisme 45 thème : Application du produit scalaire

On se place dans un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, dire si les
vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

a. $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

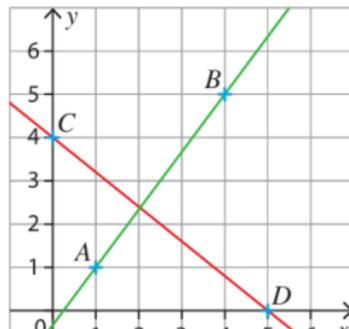
b. $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$

c. $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

Automatisme 46 thème : Application du produit scalaire

Dans le repère orthonormé ci-dessous, les points A , B , C et D ont des coordonnées entières.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?



Automatisme 47 thème : Application du produit scalaire

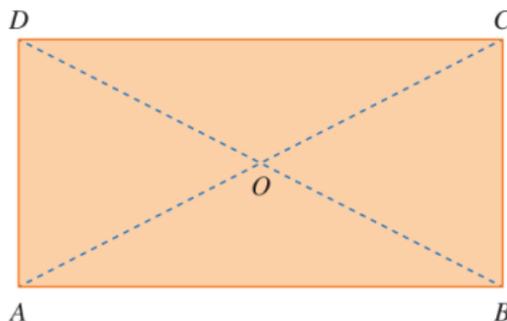
Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$
et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots$$

Automatisme 48 thème : Application du produit scalaire

QCM une seule réponse exacte

$ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 4$ et $AD = 2$.



$\vec{CO} \cdot \vec{AB}$ vaut :

(a) 8

(b) -8

(c) $-4\sqrt{5}$

Automatisme 49 thème : Application du produit scalaire

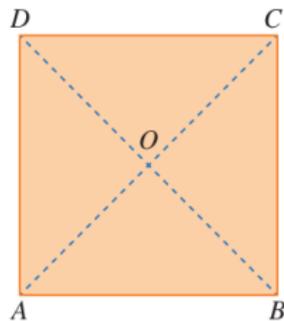
VRAI ou FAUX

$ABCD$ est un carré
de centre O et de côté 1.
Indiquer si les égalités suivantes
sont vraies ou fausses.

a. $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = 0$

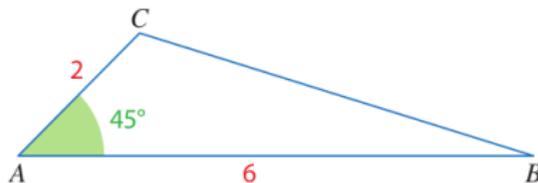
b. $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$

c. $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = 1$



Automatisme 50 *thème* : Application du produit scalaire

Calculer la valeur exacte de la longueur BC .



Automatisme 51 *thème* : Application du produit scalaire

QCM une seule réponse exacte

A et B sont deux points distincts.

L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$:

- a** est une droite ;
- b** est un cercle ;
- c** n'est ni une droite ni un cercle.

Automatisme 52 thème : Application du produit scalaire

QCM une seule réponse exacte

A et B sont deux points distincts.

L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$:

- a** est une droite ;
- b** est un cercle ;
- c** n'est ni une droite ni un cercle.

Plan

- 1 Calcul algébrique et littéral
- 2 Démontrer une égalité
- 3 Calculs d'aire
- 4 Second degré
- 5 Dérivation locale
- 6 Dérivation Globale
- 7 Suites numériques
- 8 Exponentielle
- 9 Application du produit scalaire
- 10 Raisonnement**

Automatisme 53 *thème : Raisonnement par l'absurde*

Soit une droite Δ d'équation $y = x\sqrt{2}$ dans un repère du plan.
Démontrer que l'origine du repère est le seul point à coordonnées entières qui appartient à la droite Δ .