Exemples du cours Limites de Suites 2021/2022

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

13 septembre 2021

Table des matières

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

Activité 1 Questions 1) 2) et 3)

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_n + v_n = 120$ traduit le fait que la population totale est constante.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_n + v_n = 120$ traduit le fait que la population totale est constante.
- Pour compléter la feuille de calcul, on peut saisir les formules suivantes :
  `B3 = 0,9 * B2 + 0,05 * C2` et `C3 = 120 - B3`.

Activité 1 Questions 1) 2) et 3)

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_n + v_n = 120$ traduit le fait que la population totale est constante.
- Pour compléter la feuille de calcul, on peut saisir les formules suivantes :
  `B3 = 0,9 * B2 + 0,05 * C2` et `C3 = 120 - B3`.
- On peut conjecturer que l'évolution à long terme va se stabiliser autour de 40 millions en zone rurale et 80 millions en zone urbaine.

Activité 1 Questions 4) 5) et 6)

Activité 1 Questions 4) 5) et 6)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par définition du modèle d'évolution :
  $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n$ avec $v_n = 120 - u_n$, donc
  $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05(120 - u_n) = 0,85u_n + 6$

Activité 1 Questions 4) 5) et 6)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par définition du modèle d'évolution : $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n$ avec $v_n = 120 - u_n$, donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05(120 - u_n) = 0,85u_n + 6$
- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $w_n = u_n - 40$ donc on a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85u_n - 34$$
$$w_{n+1} = 0,85(u_n - 40) = 0,85w_n$$

On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,85$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par définition du modèle d'évolution : $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n$ avec $v_n = 120 - u_n$, donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05(120 - u_n) = 0,85u_n + 6$
- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $w_n = u_n - 40$ donc on a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85u_n - 34$$
$$w_{n+1} = 0,85(u_n - 40) = 0,85w_n$$

  On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,85$.
- Par propriété des suites géométriques, on a pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 \times 0,85^n = (u_0 - 40) \times 0,85^n = 50 \times 0,85^n$. On en déduit que $u_n = 50 \times 0,85^n + 40$.

Activité 1 Questions 4) 5) et 6)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par définition du modèle d'évolution : $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05v_n$ avec $v_n = 120 - u_n$, donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,05(120 - u_n) = 0,85u_n + 6$
- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $w_n = u_n - 40$ donc on a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85u_n - 34$$
$$w_{n+1} = 0,85(u_n - 40) = 0,85w_n$$

  On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,85$.
- Par propriété des suites géométriques, on a pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 \times 0,85^n = (u_0 - 40) \times 0,85^n = 50 \times 0,85^n$. On en déduit que $u_n = 50 \times 0,85^n + 40$.
- Pour tout entier naturel n, on a donc : $v_n = 120 - u_n = 80 - 50 \times 0,85^n$.
- Puisque $0 \leqslant 0,85 < 1$, on peut conjecturer que $0,85^n$ tend vers 0 lorsque $n$tend vers $+\infty$ et donc par somme que u_n tend vers 40 et v_n tend vers 80. La conjecture établie à la question 3) est donc très probablement vraie. (En fait elle l'est.)

Capacité 1

Deux corrigés en ligne sont disponibles :

- Dans un environnement Python interactif : https://repl.it/@fredericjunier/SuitePartie2Capacite5
- Au format pdf : https://frederic-junier.github.io/Premiere/SuitesPartie2/Cours/ressources/Premiere-Corrige-PartieSuite2-ExemplesCours.pdf

Capacité 2 Partie 1

Soit u_0 le nombre de bactéries exprimé en millions au début de la phase exponentielle et u_n le nombre de bactéries après n temps de génération, c'est-à-dire après n fois 20 minutes. On a ainsi $u_0 = 50$. D'après le modèle le nombre de bactéries double à chaque génération, toutes les 20 minutes.

- $u_1 = u_0 \times 2 = 100$ puis $u_2 = 2 \times u_1 = 200$ puis $u_3 = 2 \times u_2 = 400$.
- D'après le modèle, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 2u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 2. D'après une propriété du cours sur les suites géométriques, on a $u_n = u_0 \times 2^n = 50 \times 2^n$.
- 2 heures représentent 6×20 minutes, donc le nombre de bactéries au bout de deux heures sera égal à $u_6 = 2^6 \times 50 = 6400$ millions.

- 4 heures représentent $4 \times 3 \times 20$ minutes, donc le nombre de bactéries au bout de deux heures sera égal à $u_{12} = 2^{12} \times 50 = 204800$ millions donc supérieur à 200 milliards.
- On peut conjecturer que u_n peut dépasser n'importe quel nombre pour n assez grand et que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Il s'agit d'une croissance exponentielle. En pratique cette croissance s'interrompt nécessairement au bout d'un certain nombre de générations, notre monde n'étant pas infini.

Fonction `seuil(s)` en `Python` qui retourne le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant s$ en supposant le modèle exponentiel toujours valable.

```
def seuil(s):
    u = 50
    n = 0
    while u < s:
        u = 2 * u
        n = n + 1
    return n
```

Chapitre 2 : Limites de suites

Capacité 3 ***Application des règles opératoires, formes indéterminées, exo résolu 5 p. 33***

Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = -3n^2 - 5n + 1$
2. $u_n = -2n\sqrt{n}$
3. $u_n = 3 + \dfrac{e^n}{e^{2n}+2}$
4. $u_n = -3n^2 + 5n + 1$
5. $u_n = 3n^4 - 5n^3 - n + 1$
6. $u_n = \dfrac{4n+1}{n+1}$
7. $u_n = \dfrac{n^2}{e^{-n} + \frac{1}{n}}$
8. $u_n = n - \sqrt{n}$
9. $u_n = \dfrac{4+n}{n-n^2-1}$

1) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} -3n^2 = -\infty$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} -5n + 1 = -\infty$

donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} -3n^2 - 5n + 1 = -\infty$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} -2n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

donc par produit, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} -2n\sqrt{n} = -\infty$$

3) Pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_n = 3 + \frac{e^n}{e^{2n}+2} = 3 + \frac{1}{\frac{e^{2n}}{e^n} + \frac{1}{e^n}}$$

$$u_n = 3 + \frac{1}{e^n + \frac{1}{e^n}}$$

On a $\lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

donc par quotient $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

donc par somme $\lim_{n \to +\infty} e^n + \frac{1}{e^n} = +\infty$

puis par quotient $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n + \frac{1}{e^n}} = 0^+$

et enfin par somme :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$$

4) $u_n = -3n^2 + 5n + 1$

Par somme on a une forme indéterminée du type $-\infty + +\infty$.

On factorise par le terme prépondérant en $+\infty$ qui est n^2.

Pour tout entier $n > 0$:

$$u_n = n^2\left(-3n + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

On a $\lim_{n \to +\infty} -3n + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} = -\infty$

donc par produit :

$$\lim_{n \to +\infty} n^2\left(-3n + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = -\infty$$

donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

4) Pour tout entier $n \geq 0$:

$u_n = 3n^4 - 5n^3 - n + 1$

Par somme on a une FI du type $+\infty + -\infty + -\infty$.

On factorise par le terme prépondérant en $+\infty$ qui est n^4 :

$$u_n = n^4 \times \left(3 - \frac{5}{n} - \frac{1}{n^3} + 1\right)$$

On a $\lim_{n \to +\infty} n^4 = +\infty$

et $\lim_{n \to +\infty} 3 - \frac{5}{n} - \frac{1}{n^3} + 1 = 3$

donc par produit $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Si Pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_n = \frac{4n+1}{n+1}$$

Par quotient on a une FI du type

$$\frac{+\infty}{+\infty}$$

Con: Factorisons numérateur et déno-
-minateur par leur terme pré-
-pondérant en $+\infty$ qui est n et
on les simplifie entre eux.

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_n = \frac{\cancel{n}\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)} = \frac{4+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}$$

Par quotient on peut conclure
que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

7) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{n^2}{e^{-n} + \frac{1}{n}}$$

On a $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

et par somme $\lim_{n \to +\infty} e^{-n} + \frac{1}{n} = 0^+$

donc par quotient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

8) Pour tout entier $n > 0$:

$$u_n = n - \sqrt{n}$$

Par somme on a une FI du type $+\infty - +\infty$

On factorise par le terme prépondé-rant en $+\infty$ qui est n pour tout entier $n > 0$:

$$u_n = n\left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On a $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

et $\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$

donc par produit $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

9) Pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_n = \frac{4+n}{-n-n^2-1}$$

Par quotient on a une FI du type $\frac{+\infty}{-\infty}$

On factorise numérateur et dénominateur par leur terme prépondérant en $+\infty$ et on simplifie :

$$u_n = \frac{n\left(\frac{4}{n}+1\right)}{n^2\left(\frac{1}{n}-1-\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{4}{n}}{-1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1+\frac{4}{n}}{-1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = -1$

par quotient.

donc par produit, il vient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Capacité 4 ***Déterminer la limite d'une suite géométrique, exo résolu 10 p.35***

Une institutrice propose un atelier découpage pour ses élèves à partir d'une feuille de 400 cm^2.

Étape 1 l'élève partage d'abord la feuille en 9 carrés et découpe le carré central ;

Étape 2 l'élève partage alors les 8 carrés restant en 9 carrés égaux et découpe le carré central ;

Étapes suivantes l'élève répète le même procédé ...

1. On note u_n la surface restante de la feuille après n découpes. Ainsi $u_0 = 400$.
   - **a.** Justifier que la suite (u_n) est géométrique et déterminer sa raison.
   - **b.** Que peut-on conjecturer pour les valeurs de u_n lorsque n devient aussi grand que l'on veut ?
   - **c.** Recopier et compléter la fonction `seuil(s)` pour qu'elle retourne le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant$ `s`.

     Programmer cette fonction, quelle est la valeur retournée par `seuil(10)` ?
2. On note v_n le nombre de nouveaux carrés découpés lors de la $n^{ième}$ découpe avec $n \geqslant 1$. Ainsi $v_1 = 1$, $v_2 = 8$ ...
   - **a.** Justifier que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison.
   - **b.** Que peut-on conjecturer pour les valeurs de v_n lorsque n devient aussi grand que l'on veut ?
   - **c.** Recopier et compléter la fonction `somme(n)` pour qu'elle retourne t_n, le nombre total de carrés découpés après n découpes avec $n \geqslant 1$.

     Programmer cette fonction, quelle est la valeur retournée par `somme(10)` ?
   - **d.** Déterminer une formule explicite permettant de calculer t_n pour un entier $n \geqslant 1$.

Algorithme de seuil

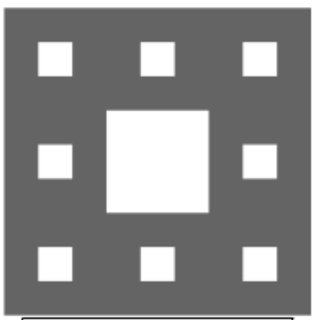
```
Fonction seuil(s):
   n ⟵ 0
   u ⟵ 400
   Tant que ......
      u ⟵ ...
      n ⟵ n + 1
   Retourne n
```

Python

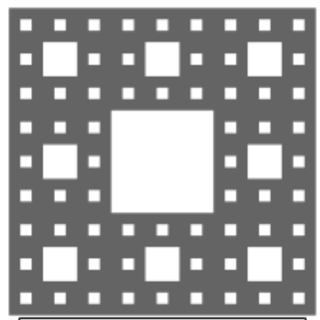
```python
def seuil(s):
    n = 0
    u = 400
    while ..... :
        u = .........
        n = n + 1
    return n
```

Étape 0 : 0 découpe

Étape 1 : 1 découpe



Étape 2 : 9 découpes



Étape 3 : 73 découpes

Calcul de somme

```
Fonction somme(n):
   v ⟵ 1
   t ⟵ ...
   Pour k allant de 2 à n
      v ⟵ ...
      t ⟵ ...
   Retourne t
```

Python

```python
def somme(n):
    v = 1
    t = ........
    for k in range(2, n + 1):
        v = .........
        t = .........
    return t
```

1.15 Capacité 14 Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique ou une question de dénombrement

1. On note u_n la surface restante de la feuille après n découpes. Ainsi $u_0 = 400$.

   a. Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \frac{8}{9}u_n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\frac{8}{9}$.

   b. On peut conjecturer que pour n assez grand u_n deviendra aussi proche de 0 que l'on veut.

   c. Fonction seuil :

```
def seuil(s):
    n = 0
    u = 400
    while u > s:
        u = 8 * u / 9
        n = n + 1
    return n
```

`seuil(10)` retourne la valeur 32.

2. On note v_n le nombre de nouveaux carrés découpés lors de la n^{ime} découpe avec $n \geqslant 1$. Ainsi $v_1 = 1$, $v_2 = 8$.

   a. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = 8v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 8.

   b. On peut conjecturer que pour n assez grand v_n deviendra aussi grand que l'on veut.

   c. Fonction somme :

```
def somme(n):
    v = 1
    t = v
    for k in range(2, n + 1):
        v = 8 * v
        t = t + v
    return t
```

`somme(10)` retourne la valeur 153391689.

   d. D'après une formule du cours :

$$t_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_1 \times \frac{1-8^n}{1-8} = \frac{8^n - 1}{7}$$

```
In [5]: def seuil(s):
            n = 0
            u = 400
            while u > s:
                u = 8 * u / 9
                n = n + 1
            return n
```

```
In [6]: seuil(10)

Out[6]: 32

In [8]: def somme(n):
            v = 1
            t = v
            for k in range(2, n + 1):
                v = 8 * v
                t = t + v
            return t

In [9]: somme(10)

Out[9]: 153391689
```