Corrigé des exemples du cours
Chapitre 1 : suites révisions.

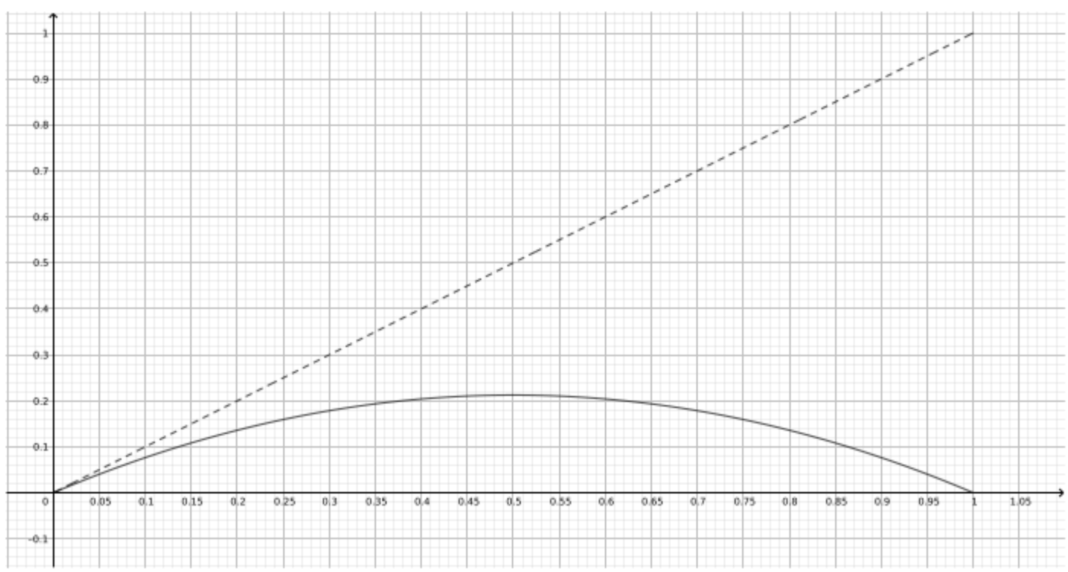
Capacité 1 ***Modéliser une situation par une suite***

On s'intéresse à une population de phoques vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.
Au début de l'an 2000, on comptait 500 phoques. Une étude a permis de modéliser ce nombre de phoques par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= 0,85u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de phoques, en milliers, au début de l'année $2000+n$.
Dans les calculs, on arrondira les nombres de phoques à l'unité.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de phoques au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On a représenté sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction définie sur $[0;1]$ par $f : x \mapsto 0,85x(1-x)$ et la droite Δ d'équation $y = x$.



1)

• Nombre de phoques en 2001 : $u_1 = 0,85\,u_0(1-u_0) = 0,85 \times 0,5 \times (1-0,5)$

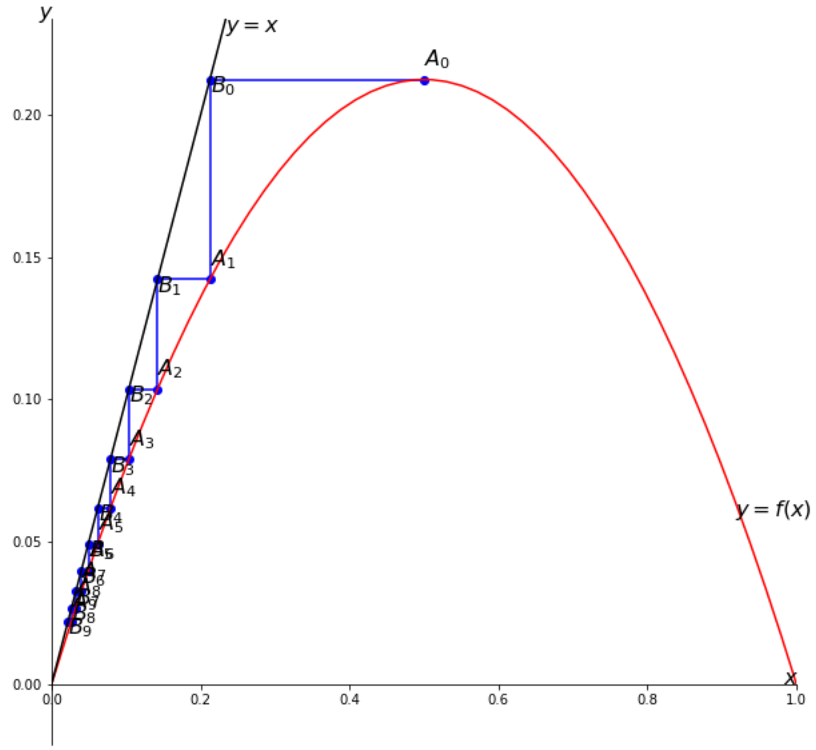
$u_1 = 0,85 \times 0,25 = 0,2125$ milliers

soit environ 213 à l'unité mais par excès

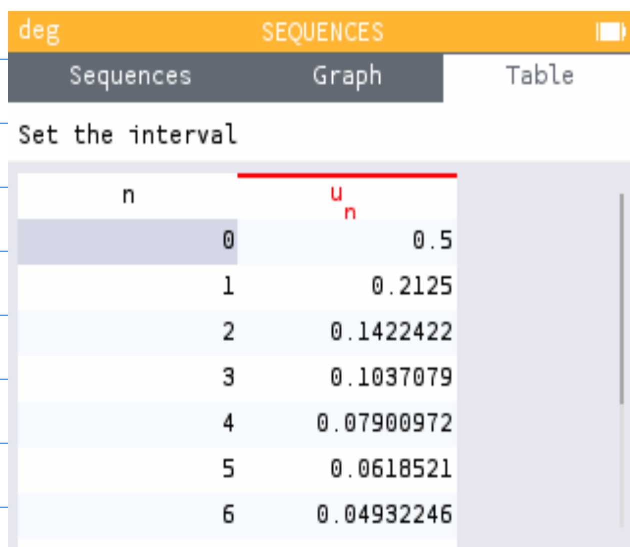
• Nombre de phoques en 2002 : $u_2 = 0,85\, u_1(1-u_1)$

$u_2 = 0,85 \times 0,2125 \times (1-0,2125) \approx 0,142$ milliers

2)



3) a)



n	u_n
0	0.5
1	0.2125
2	0.1422422
3	0.1037079
4	0.07900972
5	0.0618521
6	0.04932246
7	[illegible]

3. **a.** Calculer des valeurs approchées des dix premiers termes de la suite (u_n) avec le mode suite de sa calculatrice.

b. Reporter les premiers termes dans la capture de feuille de tableur ci-dessous. Quelle formule faudrait-il saisir en `A3` et `B3` pour compléter la feuille de calcul?

En A3 : = A2+1 et en B3 : = 0,85 * B2 * (1-B2)

	A	B
1	n	u_n
2	0	0,5
3	1	...
4	2	...
5	3	...

c. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie une liste avec les n premiers termes de la suite (u_n) :

```
def liste_valeurs(n):
    u = 0.5
    L = [u]
    for k in range(n - 1):
        u = 0.85 * u * (1 - u)
        L.append(u)
    return L
```

4. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la limite de la suite (u_n)?

En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 0 et que la population de phoques va s'éteindre

Capacité 2 ***Utiliser la méthode du signe de la différence***

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_0 = 99$ et $u_{n+1} = u_n - n^2 + 2n + 8$.
Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire l'étude des variations de la suite (u_n).

1) Pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} - u_n = -n^2 + 2n + 8$$

On étudie le signe du trinôme $-n^2 + 2n + 8$

D'abord on détermine ses racines :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36$$

$\Delta > 0$ donc 2 racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 6}{-2} = 4 \quad \text{et } x_2 x_1 = \frac{c}{a}$$

$$\text{donc } x_2 = \frac{-8}{x_1} = -2$$

Ensuite on applique la règle du signe d'un binôme :

n	0		4		$+\infty$
$-n^2+2n+8$ $= u_{n+1}-u_n$		$+$ signe de $-a$	0	$-$ signe de a	

On en déduit que :

- pour tout $n \in [\![0 ; 4]\!]$, $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ donc (u_n) croissante entre les rangs 0 et 4
- sinon pour tout $n \geqslant 4$, $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$, donc (u_n) décroissante à partir du rang 4

Capacité 2 ***Manipuler des encadrements***

Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+e^{-n}} < 1$$

On manipule des encadrements :

Pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$0 < e^{-n} \leqslant 1$$

donc $1 < 1+e^{-n} \leq 2$

donc $\boxed{\frac{1}{1} > \frac{1}{1+e^{-n}} \geq \frac{1}{2}}$

Une autre méthode est d'appliquer deux fois l'étude du signe de la différence.

D'une part : $1 - \frac{1}{1+e^{-n}} = \frac{1+e^{-n}-1}{1+e^{-n}} = \frac{e^{-n}}{1+e^{-n}}$

Or $e^{-n} > 0$ donc $1 - \frac{1}{1+e^{-n}} > 0$

donc $\frac{1}{1+e^{-n}} < 1$

D'autre part : $\frac{1}{1+e^{-n}} - \frac{1}{2} = \frac{2-1-e^{-n}}{2(1+e^{-n})}$

$= \frac{1-e^{-n}}{2(1+e^{-n})}$

Or $n \geq 0$ donc $e^{-n} \leq 1$

et donc $\frac{1}{1+e^{-n}} - \frac{1}{2} \geq 0$

et donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{-n}}$

Capacité 4 ***Choisir une méthode adaptée pour étudier le sens de variation d'une suite***

1. $\boxed{\textbf{Méthode 1}}$: *Si $u_n = f(n)$, étudier les variations de f sur* $[0\,;+\infty[$

   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$, par $u_n = \dfrac{e^n}{e^n+1}$.

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$. On a pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = f(n)$.

   ☞ Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $f'(x)$.
   ATTENTION, on peut dériver la fonction f mais pas la suite (u_n) car celle-ci n'est pas définie sur un intervalle !!!

   ☞ En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et le sens de variation de (u_n).

2. $\boxed{\textbf{Méthode 2}}$: *Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$*

   Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n(1-2u_n)$.

   ☞ Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   ☞ Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{e^n}{e^n+1} = f(n)$$

avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

$f = \dfrac{u}{v}$ avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$

donc f dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x :

$u(x) = e^x$ $\qquad$ $v(x) = e^x+1$

$u'(x) = e^x$ $\qquad$ $v'(x) = e^x$

D'après une formule du cours :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

donc : $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Pour tout réel x, on $e^x > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$

donc $f'(x) > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = f(n)$ est donc croissante car l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{R}$.

2) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = u_n(1-2u_n) \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n(1-2u_n) - u_n$$
$$u_{n+1} - u_n = u_n - 2u_n^2 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -2u_n^2$$

U_n carré est toujours positif (pour un réel)

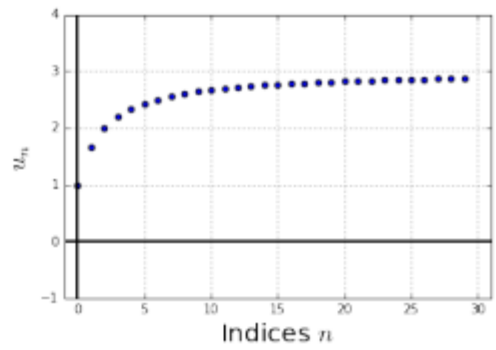
donc $\quad u_n^2 \geq 0$

et donc $\quad u_{n+1} - u_n \leq 0$

On en déduit que pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} \leq u_n$ et que la suite (u_n) est décroissante

Capacité 7 ***Démontrer qu'une suite est bornée***

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = \dfrac{3n+2}{n+2}$.



1. On donne ci-contre la représentation graphique des premiers termes de la suite (u_n) dans un repère orthonormal.

   Émettre une conjecture sur un minorant et un majorant possibles de la suite (u_n).

2. Démontrer cette conjecture.

1) Graphiquement, on peut conjecturer que pour tout entier $n \geq 0$, l'on a :

$$1 \leq u_n < 3$$

et donc que 1 est minorant et 3 un majorant de la suite (u_n).

2) Démontrons cette conjecture en appliquant deux fois la méthode du signe de la différence :

Pour tout entier $n \geq 0$:

$$3 - u_n = 3 - \frac{3n+2}{n+2} = \frac{3(n+2) - (3n+2)}{n+2}$$

$$3 - u_n = \frac{4}{n+2}$$

On a donc $3 - u_n > 0$

et donc $u_n < 3$

3 est donc un majorant de (u_n)

D'autre part :

$$u_n - 1 = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{n+2}{n+2} = \frac{2n}{n+2}$$

On a donc $u_n - 1 \geqslant 0$

et donc $1 \leq u_n$

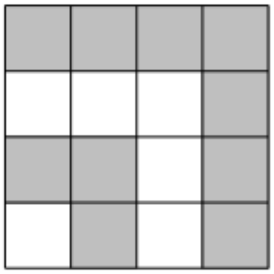
1 est donc un minorant de (u_n)

<u>Remarque:</u> On peut démontrer que (u_n) est croissante et donc minorée par son premier terme u_0.

Capacité 8 ***Étudier une suite arithmétique***

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ des entiers impairs successifs :

$$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 5, \ldots$$



1. Justifier que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmétique.
2. Soit n un entier naturel positif, exprimer u_n en fonction de n.
3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} u_k = n^2$.

1) Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = u_n + 2$$

La suite des entiers impairs successifs est donc arithmétique de raison 2.

2) D'après une propriété du cours, pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1) \times 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1}$$

3) D'après une propriété du cours, pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \cdots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k = n \times \frac{1 + 2n - 1}{2} = n^2}$

Capacité 7 ***Étudier une suite géométrique***

Un globe-trotter a comme objectif de parcourir 2000 km à pied. Il peut parcourir 40 km en une journée, mais, la fatigue s'accumulant, la distance qu'il parcourt diminue de 3 % chaque nouvelle journée.
On note la distance D_n la distance parcourue durant le n-ième jour.
Le premier jour de son périple, il parcourt donc $D_1 = 40km$.

1. Calculer la distance parcourue le deuxième jour.
2. Quelle est la nature de la suite (D_n) ? Donnez ses éléments caractéristiques.
3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, déterminer l'expression de D_n en fonction de n.
4. Pour calculer le nombre de jours qu'il faudra au globe-trotter pour atteindre son objectif, on a écrit la fonction Python suivante :

```
def nb_jours():
    j = 1
    u = 40
    S = 40
    while S<2000:
        u = 0.97 * u
        S = S + u
        j = j+1
    return j
```

   Compléter les deux lignes incomplètes de cette fonction.

5. Déterminer une expression en fonction de n de la distance totale T_n parcourue au bout de n jours :

$$T_n = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$$

6. Réaliser un tableau de valeurs de T_n avec le mode suite de sa calculatrice et en déduire le nombre de jours qu'il qu'il faudra au globe-trotter pour atteindre son objectif.

1) La distance parcourue le 2ème jour est de :

$$D_2 = D_1 - \frac{3}{100} \times D_1 = D_1 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right)$$

$$D_2 = D_1 \times 0{,}97 = 40 \times 0{,}97 = 38{,}8 \text{ km}$$

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$D_{n+1} = D_n - \frac{3}{100} \times D_n = 0{,}97\, D_n$$

La suite (D_n) est donc géométrique de raison $0{,}97$.

3) D'après une propriété du cours, on peut donner une expression directe de D_n en fonction de n :

Pour tout entier $n \geq 1$, $D_n = D_1 \times 0{,}97^{n-1}$

donc $D_n = 40 \times 0{,}97^{n-1}$

5) Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$T_n = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$

D'après une propriété du cours sur la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, on a :

$$T_n = 1^{er}\text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$$T_n = 40 \times \frac{1 - 0{,}97^n}{1 - 0{,}97}$$

$$T_n = \frac{4000}{3} \times (1 - 0{,}97^n)$$

deg SEQUENCES

Sequences | Graph | Table

Set the interval

n	u_n
0	0
1	40
2	78.8
3	116.436
4	152.9429
5	188.3546
6	222.704
7	[illegible]

On peut observer que le coureur atteindra son objectif au bout de 6 jours.